学習理論特論：課題

包 含

2026 年 10 月 22 日

■課題に取り組む上で．

- 手書き（スキャンしたもの）での提出を想定．
- 提出は全 3 回分をまとめて最後に行う．
- 各回 ★ の合計が 4 以上になるように選択して回答せよ．

第 1 回

#1 (★)

データセット $\{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}^d \times \{\pm 1\}$ が与えられたとき，次のソフトマージン最大化問題を考える：

$$\min_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^d} \frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|_2^2 + C\sum_{i=1}^n \xi_i \quad \text{s.t.} \quad y_i \cdot \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_i \geq 1 - \xi_i, \quad \xi_i \geq 0 \quad \text{for } i \in [n].$$

この問題がヒンジ損失 $\phi(\alpha) = \max\{0, 1-\alpha\}$ を用いた以下の正則化付き経験リスク最小化と等価であることを示せ：

$$\min_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^d} \frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|_2^2 + C\sum_{i=1}^n \phi(y_i \cdot \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_i).$$

#2 (★)

01 損失の条件付きリスク，条件付き Bayes リスクをそれぞれ

$$C_\eta(\alpha) \coloneqq \eta \mathbb{1}_{\{\alpha \leq 0\}} + (1-\eta)\mathbb{1}_{\{\alpha > 0\}}, \quad C_\eta^* \coloneqq \inf_{\alpha\in\mathbb{R}} C_\eta(\alpha)$$

と書く．このとき，以下を示せ．

$$C_\eta(\alpha) - C_\eta^* = |2\eta - 1| \cdot \mathbb{1}_{\{\mathrm{sign}(\alpha) \neq \mathrm{sign}(\eta - 1/2)\}}.$$

#3 (★)

二乗損失 $\phi(\alpha) = (1-\alpha)^2/2$ の条件付きリスク $C_{\phi,\eta}(\alpha) = \eta\phi(\alpha) + (1-\eta)\phi(-\alpha)$ の minimizer α^*，および適合関数 $\delta(\varepsilon)$ をそれぞれ導出せよ．

#4 (★)

ロジスティック損失 $\phi(\alpha) = \log(1 + \exp(-\alpha))$ の条件付きリスクの minimizer α^*，および適合関数 $\delta(\varepsilon)$ をそれぞれ導出せよ．

#5 (★)

ヒンジ損失 $\phi(\alpha) = \max\{0, 1 - \alpha\}$ の条件付きリスクの minimizer α^*，および適合関数 $\delta(\varepsilon)$ をそれぞれ導出せよ．

#6 (★★)

確率単体を $\Delta^K \coloneqq \left\{\eta \in \mathbb{R}^K \;\middle|\; \eta_k \geq 0,\ \sum_{k=1}^K \eta_k = 1\right\}$ と書く．また，$\eta, \widehat{\eta} \in \Delta^K$ に対して交差エントロピーを $H(\eta, \widehat{\eta}) \coloneqq -\sum_{k=1}^K \eta_k \log \eta_k$ と書く．このとき，*Gibbs* **の不等式**

$$H(\eta, \eta) \leq H(\eta, \widehat{\eta})$$

を未定乗数法に従って示せ．また，等号成立条件が $\eta = \widehat{\eta}$ であることを確認せよ．

第 2 回（TBA）

第 3 回（TBA）