§5. 凸解析

extended reals.

$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 拡張実数　　$X \subseteq \mathbb{R}^d$ 凸集合.

Def. 凸関数 $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ が"proper" $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $\exists x_0 \in X$ s.t. $f(x_0) < +\infty$



proper ✓



proper ✓



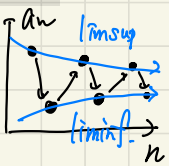
not proper ✗

Def. $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ が"$x_0 \in X$で" 下半連続 (lower-semicontinuous : lsc)

$\overset{\text{def.}}{\iff}$ $\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$.

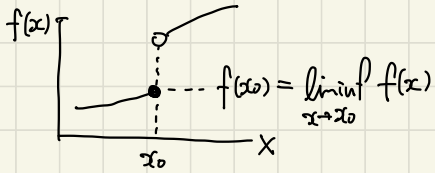
f が各点 $x_0 \in X$ で lsc のとき, f は lsc であるという

Remark. 数列 $(a_n)_{n \geq 1}$ に対し, $\liminf_{n \to \infty} a_n := \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geq n} a_k$

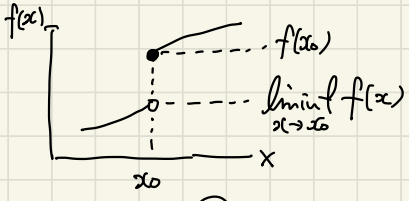


関数 f に対し, $\liminf_{x \to x_0} f(x) := \inf_{\substack{(x_n)_{n \geq 1} \subseteq X \\ x_n \to x_0}} \liminf_{n \to \infty} f(x_n)$

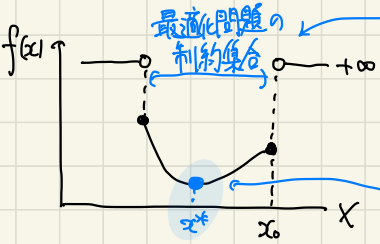
○ lsc の直感



lsc ✓



not lsc ✗



lsc ✓

コンパクトになっている (有界・閉)

⇒ EVT (極小値定理) より

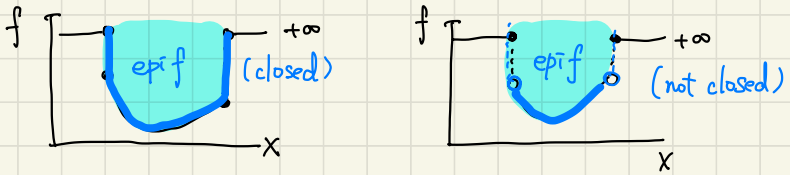
minimizer が存在

◦ 定義.

effective domain　$\operatorname{dom} f := \{x \in X : f(x) < \infty\}$.

epigraph　$\operatorname{epi} f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in \operatorname{dom} f,\ f(x) \le y\}$.

Def. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ が closed $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\operatorname{epi} f$ が閉集合



Prop. 5.1. 関数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ が closed $\Leftrightarrow$ lsc

そのため $\operatorname{epi} f$: closed を lsc の定義にすることもある.

Proof. 数列 $(a_n)_{n\ge1}$ (収束列を限らない) に対し, 常に部分列 $(a_{n_k})_{k\ge1}$ で $a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\to} \liminf_{n\to\infty} a_n$ となるものが とれる ことを認める.

($\Rightarrow$) $\operatorname{epi} f$ が閉なので, ある $x_0 \in X$ を固定すると, $x_n \to x_0$ なる $(x_n)_{n\ge1} \subseteq \operatorname{dom} f$ をとれる.

数列 $(f(x_n))_{n\ge1}$ を考えると, 上の fact より 部分列 $(f(x_{n_k}))_{k\ge1}$ で

$f(x_{n_k}) \overset{k\to\infty}{\to} \underbrace{\liminf_{n\to\infty} f(x_n)}_{=: y_0}$ となるものが とれる.

このとき, $\underbrace{(x_{n_k}, f(x_{n_k}))}_{\in \operatorname{epi} f} \to (x_0, y_0)$ になっている. (構成より)

$\operatorname{epi} f$ が閉なので $(x_0, y_0) \in \operatorname{epi} f$ より, $y_0 \ge f(x_0)$.

以上は $(x_n)_{n\ge1}$ のとり方によらないから $\liminf_{x\to x_0} f(x) \ge f(x_0)$.

($\Leftarrow$) 収束列 $(x_n, y_n)_{n\ge1} \subseteq \operatorname{epi} f$ s.t. $(x_n, y_n) \to \underbrace{(x_0, y_0)}_{\in \operatorname{epi} f}$ を示す (goal)

$\operatorname{epi} f$ の定義から $f(x_n) \le y_n$

$$\underbrace{\liminf_{n\to\infty} f(x_n)}_{\ge f(x_0)\ (\because f:\text{lsc})} \le \liminf_{n\to\infty} y_n = y_0$$

したがって $f(x_0) \le y_0 \Rightarrow (x_0, y_0) \in \operatorname{epi} f$. □

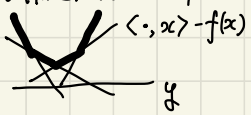
- **Def.** 関数 $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ の凸共役 (convex conjugate) は

$$f^*(y) := \sup_{x \in \mathrm{dom}\, f} \{ \langle y, x \rangle - f(x) \} \qquad (y \in \mathbb{R}^d)$$

他には Legendre 変換, Fenchel-Legendre 変換 とも呼ばれる.

Fact. f^* は定義上 closed & convex (f がそうでなくても)

- closed: ∵ closed set の共通部分は閉
- convex: ∵ f^* は affine 関数の sup



- **Prop. 5.2.** (Fenchel-Young の不等式)

$$f(x) + f^*(y) \geq \langle y, x \rangle \qquad \forall (x, y) \in \mathrm{dom}\, f \times \mathrm{dom}\, f^*$$

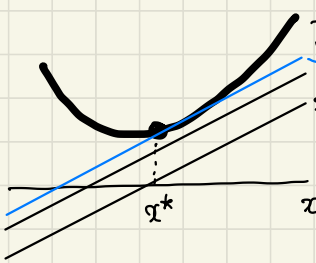
f^* の定義より直ちに従う.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を考える.

imagine 接線 $f'(x^*)(x - x^*) + f(x^*)$

$$f(x) \geq \langle y, x \rangle - f^*(y) = \langle y, x - x^* \rangle + f(x^*)$$

(ただし x^* は $f^*(y) = \langle y, x^* \rangle - f(x^*)$ を満たすもの)



y は勾配に対応

$y = \nabla f(x^*)$ のとき,

点 x^* と勾配 y が対応

primal / dual

- 例: neg. Shannon entropy $f(x) = \sum_{i=1}^d x_i (\log x_i - 1) \quad (x \in \Delta^d)$

$$f^*(y) = \sup_{x \in \Delta^d} \left\{ \langle y, x \rangle - f(x) \right\} = \max_x \left\{ \sum_{i=1}^d y_i x_i - \sum_{i=1}^d x_i (\log x_i - 1) : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^d x_i = 1 \right\}$$

Lagrangian を次で定義:

$$L(x, \mu) := -\sum_{i=1}^d y_i x_i + \sum_{i=1}^d x_i (\log x_i - 1) + \mu \left(\sum_{i=1}^d x_i - 1 \right). \quad (\text{本当は } x_i \geq 0 \text{ も必要} \cdots)$$

計算すると, $x_i^* = \dfrac{e^{y_i}}{\sum_{i=1}^d e^{y_i}} = \mathrm{softmax}_i(y)$

$$f^*(y) = \log \left(\sum_{i=1}^d e^{y_i} \right) = \mathrm{LogSumExp}(y).$$

- Biconjugate $f^{**} := (f^*)^*$ は常に closed convex.

FY不等式より $\quad f(x) \geq \langle y, x \rangle - f^*(y) \quad (\forall y \in \mathrm{dom}\, f^*)$

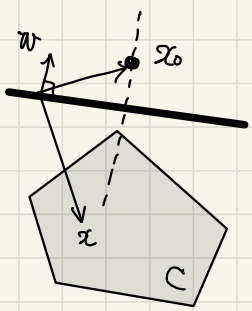
$$\rightsquigarrow \quad f(x) \geq \sup_{y \in \mathrm{dom} f^*} \left\{ \langle y, x \rangle - f^*(y) \right\} = f^{**}(x).$$

- **Prop. 5.3** (Fenchel-Moreau の定理)
関数 $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ が proper であるとき, $f = f^{**} \iff f$: lsc & convex

以下を証明中に使う

Lem. 5.4 (分離超平面定理)
$C \neq \emptyset$ を $\mathbb{R}^d$ 中の closed convex set とし, $x_0 \notin C$ とする.
このとき, $\exists w \in \mathbb{R}^d (\neq 0), \beta \in \mathbb{R}$ s.t.

$$\langle w, x \rangle \leq \beta < \langle w, x_0 \rangle \quad (\forall x \in C)$$



- 5.3 の証明. ($\Rightarrow$) は簡単. ($\mathrm{epi}(f^{**}) = \mathrm{epi}(f)$ が closed なので)
($\Leftarrow$) のうち特に $f \le f^{**}$ を示す.

$f(x_0) < \infty$ となる x_0 を1つ固定し, $y_0 < f(x_0)$ なる y_0 とる ($(x_0, y_0) \notin \mathrm{epi}\, f$)
/分離超平面定理 より,

$\exists (w, \lambda) \in \mathbb{R}^{d+1}$ ($\neq 0$) & $\beta \in \mathbb{R}$ s.t.

$\langle w, x \rangle + \lambda y \le \beta < \langle w, x_0 \rangle + \lambda y_0$ $\quad (\forall (x, y) \in \mathrm{epi}\, f)$.

(f: lsc $\Rightarrow$ $\mathrm{epi}\, f$: closed を使った.)

ここで $\lambda \le 0$ がわかる. (otherwise y はいくらでも大きくできるので矛盾).

さらに $\lambda < 0$ もわかる.

(なぜなら $\lambda = 0$ とすると, $\langle w, x \rangle < \langle w, x_0 \rangle$ $\forall x \in \mathrm{dom}\, f$ だが,
これは $x_0 \in \mathrm{dom}\, f$ と矛盾. (f: closed が効いている.))

$\rightsquigarrow$ $\left\langle \frac{w}{|\lambda|}, x \right\rangle - y < \left\langle \frac{w}{|\lambda|}, x_0 \right\rangle - y_0$ $\quad \forall (x, y) \in \mathrm{dom}\, f$.

$y = f(x)$ とおき, $\sup_x$ をとると $f^*\left(\frac{w}{|\lambda|}\right) < \left\langle \frac{w}{|\lambda|}, x_0 \right\rangle - y_0$.

$\rightsquigarrow$ $y_0 < \left\langle \frac{w}{|\lambda|}, x_0 \right\rangle - f^*\left(\frac{w}{|\lambda|}\right) \le f^{**}(x_0)$.

y_0 は ($y_0 < f(x_0)$ の中で) 任意だから $f(x_0) \le f^{**}(x_0)$.

$\rightsquigarrow$ $f \le f^{**}$ $\quad \square$.